



# TABLICE SMRTNOSTI

# PRVE TABLICE MORTALITETA

- Detaljna analiza smrtnosti neke populacije
- Bazira se na aposteriornim vjerovatnoćama
- Grube tablice smrtnosti izrađene su još sredinom trećeg vijeka (stari Rim)
- Početak modernih tablica smrtnosti se vezuje za 17. vijek (Britanija i Poljska)
- Prve, u naučnom smislu, korektne tablice je izradio engleski aktuar Joshua Milne
- Kontinuirani rad na njihovoj izradi počeo najprije u Švedskoj (1755.), zatim u Holandiji, Norveškoj, Njemačkoj i Švajcarskoj
- SFRJ – u prvoj polovini 20. vijeka, pa detaljnije u periodu 1952-1954.



# KOHORTNE I PERIODIČNE TABLICE MORTALITETA

- Za izradu *kohortnih tablica* smrtnosti potrebno je da postoje podaci o svim umrlim licima koji pripadaju jednoj kohorti rođenih (100 i više god.).
- Kohortne tablice mogu da ukažu na poboljšanja u uslovima mortaliteta tokom trajanja jedne kohorte. Takođe, daju veće vrijednosti za srednje trajanje života nego periodične.
- *Periodične tablice* se zasnivaju na specifičnim stopama smrtnosti za sve starosti u određenom periodu za koji se izrađuju. Uvodi se jedna hipotetička (teorijska) kohorta, najčešće 100000 ljudi, i njoj se atribuirira smrtnost po starosti realne populacije za datu godinu. Ove tablice stoga odražavaju uslove smrtnosti stvarne populacije u toku perioda (ili samo jedne godine), a preko jedne hipotetičke kohorte istovremeno rođenih.
- Kod periodičnih tablica, očekivano trajanje života pokazuje broj godina koje će doživjeti novorođenče, ako živi u istim uslovima specifičnog mortaliteta po starosti u toku čitavog svog života, kao što su uslovi u datoj godini.



# POTPUNE I SKRAĆENE TABLICE MORTALITETA

- *Potpune ili detaljne tablice* su one kod kojih je starost, kao i sve funkcije u njima, data po pojedinačnim godinama. (0,1,2,...,99,100 god.)
- Kod *skraćениh tablica* je starost, kao i sve druge funkcije, data kao interval. (Najčešći petogodišnji intervali: 0, 1-4, 5-9, 10-14,..., 80-84, 85+)
- Skraćene tablice su po pravilu aproksimativne, jer se vjerovatnoća umiranja određuje aproksimacijom pomoću stope smrtnosti po starosti.



# BIOMETRIJSKE FUNKCIJE U TABLICAMA MORTALITETA

- U predkoloni tablica smrtnosti je starost, i predstavlja *nezavisnu varijablu*.
- U ostalim kolonama su date *biometrijske funkcije* – koje predstavljaju funkcije starosti  $x$
- Osnovna biometrijska funkcija je *vjerovatnoća umiranja* – jer se jedino ona dobija poređenjem podataka o skupovima umrlih različitih starosti i određenih skupova živih lica po starosti. Sve ostale funkcije se izvode iz nje.
- Vjerovatnoća umiranja  $q_x$  je vjerovatnoća da lice staro  $x$  godina neće doživjeti starost od  $x+1$  godinu.
- Leksisov dijagram



# VJEROVATNOĆA UMIRANJA

- $q_x = \frac{{}^t\bar{x}M_x^t + {}^t\bar{x}M_x^{t+1}}{L_x}$  ili preciznije  $q_x = \frac{{}^t\bar{x}M_x^t + {}^t\bar{x}M_x^{t+1}}{{}^t\bar{x}V_{x-1}^t - {}^t\bar{x}M_{x-1}^t}$
- $L_x$  - periodični skupovi živih starih  $x$  godina
- ${}^t\bar{x}M_x^t$  - skup umrlih lica starih  $x$  godina, rođenih u godini  $t-x$ , koje je smrt zadesila u godini  $t$
- Vjerovatnoća *doživljenja* -  $p_x$  - vjerovatnoća da će lice staro  $x$  godina doživjeti starost od  $x+1$  godinu.
- $p_x = 1 - q_x$
- *Broj živih lica starih tačno  $x$  godina* -  $l_x$
- $l_0 = 100000$ ,  $l_1 = 100000 \times p_0 = l_0 \times p_0$
- $l_{x+1} = l_x \times p_x$



# OSTALE BIOMETRIJSKE FUNKCIJE U TABLICAMA MORTALITETA

- *Broj umrlih u starosti od x do x+1:*
- $d_x = l_x - l_{x+1}$
- $q_x = \frac{l_x - l_{x+1}}{l_x}$
- *Srednji broj živih lica -  $L_x$  - to su lica u starosti od x do x+1 godine.*
- $L_x = \frac{l_x + l_{x+1}}{2}$
- *Ako je starost data kao neprekidna varijabla, tada je:  $L_x = \int_x^{x+1} l_x dx$*
- *Očekivano trajanje života za lica starosti x godina*  
-  $e_x = \frac{\sum_x^\omega L_x}{l_x}$



# JOŠ NEKI POKAZATELJI NA OSNOVU TABLICA SMRTNOSTI

- *Stopa doživljenja* -  $P_x$  - označava proporciju lica starih od  $x$  do ispod  $x+1$  godine koja će se posle godinu dana nalaziti u starosnoj grupi od  $x+1$  do  $x+2$  godine:

$$P_x = \frac{L_{x+1}}{L_x}$$

- *Stopa doživljenja za živorođene* -  $P_b$  - pokazuje proporciju živorođenih u toku jedne godine, koji će se na kraju tog perioda nalaziti u starosnoj grupi od 0 do ispod 1 godine:

$$P_b = \frac{L_0}{100000}$$

- Kod izrade projekcije stanovništva





# JOŠ NEKI POKAZATELJI NA OSNOVU TABLICA SMRTNOSTI

- *Vjerovatnoća doživljenja* –  $P(x)$  - vjerovatnoća da će živorođeno dijete doživjeti starost od  $x$  do  $x+1$  godine.

$$P(x) = \frac{L_x}{100000}$$

- *Vjerovatnoća doživljenja* –  $p(x)$  - vjerovatnoća da će živorođeno dijete doživjeti starost od tačno  $x$  godina.

$$p(x) = \frac{l_x}{100000}$$

- Za demografske modele



# IZRADA POTPUNIH TABLICA MORTALITETA

- Potrebni su podaci o umrlim licima prema polu i pojedinačnim godinama starosti, zatim podaci o broju živorođenih prema polu, kao i podaci o broju stanovnika prema polu i pojedinačnim godinama starosti.
- Broj stanovnika je raspoloživ za godine popisa, pa se ove tablice izrađuju za popisne godine
- Podaci o umrlim licima po starosti odnose se na trogodište, a popisna godina je središnja.
- Sirove vjerovatnoće umiranja posjeduju izvjesne nepravilnosti (greške prilikom prikupljanja podataka ili zbog relativno malog broja posmatranja u nekim starostima) – izravnanje ovih vrijednosti različitim formulama



# IZRADA SKRAĆENIH TABLICA MORTALITETA

- Poželjna ako se radi o malim populacijama kod kojih su moguća velika odstupanja u brojevima umrlih u pojedinim godinama starosti
- Konciznije i daju pregledniju sliku smrtnosti
- ${}_5p_x$  - vjerovatnoća doživljenja da će lice staro  $x$  godina doživjeti  $x+5$  godinu
- $l_x$  - broj živih lica starih tačno  $x$  godina (0, 1, 5, 10, 15, 20, ..., 80, 85+)
- Dva načina dobijanja skraćenih tablica mortaliteta: na osnovu potpunih tablica (pomoću odgovarajućih formula i veza između njih) i aproksimativne skraćene tablice mortaliteta



# APROKSIMATIVNE SKRAĆENE TABLICE MORTALITETA

- Zasnivaju se na unaprijed uspostavljenoj vezi između specifičnih stopa smrtnosti po starosti i vjerovatnoće umiranja po starosti
- Teorijski ili empirijski utvrđen odnos između tih pokazatelja
- Tada, koristeći unaprijed utvrđenu vezu, vjerovatnoća umiranja se aproksimativno izračunava, odnosno vrši se konverzija stope u vjerovatnoću, tj.  ${}_5m_x \rightarrow {}_5q_x$ .
- Tablice Reed-Merrell (1939)
- Ostale bimetrijske funkcije se računaju na uobičajeni način.
- Brojni pokušaji uspostavljanja teorijskih veza između stopa i vjerovatnoća (npr. funkcija broja živih lica je linearna u intervalu  $(x, x+n)$  -  $l_x = a + bx$ , ili eksponencijalna -  $l_x = e^{a+bx}$ )



# UPOTREBA TABLICA MORTALITETA

- Prvenstveno oblast aktuarstva
- Demografija, epidemiologija, biologija i druge oblasti
- U okviru demografije najprije samo u analizi smrtnosti, ali se proširila i na analizu fertiliteta, nupcijaliteta, divorcijaliteta, ulaska i izlaska iz radne snage
- Osiguranje života – tablice mortaliteta sa utvrđenom kamatnom stopom su osnova za izračunavanje premija koje osiguranici plaćaju osiguravaču.
- Detaljna analiza smrtnosti prema starosti i polu
- Ne zavise od starosne strukture, pa su pogodne za komparativne analize smrtnosti različitih populacija ili za jednu tokom vremena (očekivano trajanje života novorođenih)



# UPOTREBA TABLICA MORTALITETA

- Opšta stopa smrtnosti – tzv. stopa mortaliteta stacionarnog stanovništva

$$d = 1/\dot{e}_0$$

- Dakle, stopa mortaliteta jednaka je recipročnoj vrijednosti očekivanog trajanja života za novorođene. Na taj način je pogodna za poređenje nivoa smrtnosti različitih populacija, jer je uticaj starosne strukture isključen.
- Tablice mortaliteta izrađuju se na osnovu podataka o umrlim licima po starosti od svih uzroka smrti, ali ih je moguće izraditi i eliminisanjem smrtnih slučajeva od pojedinih uzroka smrti – tako omogućavaju da se izdvoji efekat pojedinih uzroka na promjene u očekivanom trajanju života
- Stope doživljenja izračunate na bazi tablica smrtnosti imaju veliku primjenu kod projekcija stanovništva – preko njih se realizuje hipoteza o mortalitetu.



# MODELI TABLICA MORTALITETA

- Sistemi hipotetičkih rasporeda smrtnosti po starosti i polu
- Rezultat sistematske analize varijacija smrtnosti različitih populacija sa ciljem da se identifikuju zajednički tipovi smrtnosti
- Primarna upotreba: kod ocjenjivanja demografskih parametara u slučajevima kada se ne raspolaze neophodnim podacima, ili su podaci manjkavi i nepouzdana
- Modeli mogu da se koriste i u testiranju tačnosti postojećih tablica, kao i prilikom izrade projekcija



# MODELI TABLICA UN

- Prvi modeli još od 1955. godine
- Bazirani na 158 nacionalnih tablica za svaki pol posebno - uglavnom evropske zemlje u periodu od 1900. do 1950. god.
- Vjerovatnoća umiranja na bazi kvadratne funkcije, počevši od unaprijed date vrijednosti za  $q_0$ , u određenim razmacima. Rezultat – 40 tablica
- Nedostaci vezani za izračunavanje vjerovatnoće umiranja – samo početna  $q_0$  je nezavisna varijabla, a ostale su najprije zavisne, pa potom nezavisne
- Nedostatak i što su tablice koje su bile baza za rad bile različitog kvaliteta





# COALE-DEMENY TABLICE

- 1966. godine
- Baza za analizu - 326 tablica za oba pola iz svih dijelova svijeta za periode od prije 1870. god., od 1871. do 1945. i posle 1945. god.
- Za konstrukciju modela izabrane su 192 tablice, jer ostale nisu zadovoljavale osnovne kriterijume
- Analiza je pokazala da se jasno izdvajaju 4 različita tipa smrtnosti po starosti: „istočni“, „sjeverni“, „južni“ i „zapadni“ tip
- Tablice sadrže po 24 para tablica za svaki pol u svakom od 4 regionalna tipa smrtnosti. Vjerovatnoća umiranja je izračunata na bazi linearne regresije u kojoj je nezavisna varijabla očekivano trajanje života za lica stara 10 godina



# LEDERMANN-OVI MODELI TABLICA

- Na bazi 154 tablica smrtnosti
- Regresioni modeli koji se koriste za ocjenu vjerovatnoće umiranja polaze od većeg broja nezavisnih varijabli ili parova varijabli.
- Veći broj nezavisnih varijabli smanjuje pristrasnost u odnosu na prethodne modele, ali se javlja problem ocjene velikog broja nezavisnih varijabli indirektnim putem u slučajevima kada se ne raspolože adekvatnim podacima



# BRASS-OVI MODELI TABLICA

- Poznati pod nazivom „logit system“
- Veza između dvije tablice smrtnosti, od kojih je jedna uzeta kao standard, može se predstaviti kao:

$$\lambda(p(x)) = \alpha + \beta\lambda(p_s(x))$$

- $p_s$  - funkcija doživljenja za standardnu populaciju
- $\lambda$  – definisana logit transformacija
- Za bilo koji par koeficijenata  $\alpha$  i  $\beta$

$$p(x) = \frac{1}{1 + e^{2\alpha + 2\beta\lambda(p_s(x))}}$$

- Formula se koristi za sve starosti, izuzev početnu (nultu) i krajnju starost ( $\omega$ ), gdje se unaprijed određuje  $p(0)=1$  i  $p(\omega)=0$ .



# BRASS-OVI MODELI TABLICA

- Standardna tablica – Brass-ov standard najčešće
- Vrlo fleksibilan sistem – matematička veza između tablica koja omogućava da se generišu tablice za konkretnu (ispitivanu) populaciju
- Moguće je izračunati biometrijske funkcije za pojedine starosti bez prethodno izrađenih kompletnih tablica
- $\text{logit}(p(x_1)) = \alpha + \beta \text{logit}(p_s(x_1))$
- $\text{logit}(p(x_2)) = \alpha + \beta \text{logit}(p_s(x_2))$



# MODELI TABLICA SMRTNOSTI ZA ZEMLJE U RAZVOJU

- Razvijeni od strane odjeljenja za stanovništvo UN
- Izgrađeni na osnovu 72 tablice (po 36 za svaki pol) iz 22 zemlje u razvoju
- Izdvojeni klasteri mortaliteta po starosti – jasno izdvojena prosječna starosna struktura smrtnosti: „latinoamerički“, „čileanski“, „južnoazijski“, „dalekoistočni“ i „opšti“
- Opšti klaster – predstavlja prosjek svih tablica, kao i onih koje nisu ušle ni u jedan klaster – veoma sličan „zapadnom“ modelu Coal-Demeny tablica
- Primjena analize glavnih komponenata na razlike svake starosne strukture od prosjeka za klaster kome pripada. Prva glavna komponenta – većina varijacija
- Imaju prednosti modela Coal-Demeny, ali i fleksibilnost Brass-ovog logit sistema

